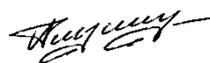


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
уравнений в частных производных  
и теории вероятностей



А.В. Глушко

16.04.24

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**ФТД.03 Дополнительные главы уравнений с частными производными**  
*Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом*

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика
2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, Математическое моделирование
3. Квалификация выпускника: Бакалавр
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета
6. Составители программы: проф., д.ф.-м.н. Глушко А.В.

\_\_\_\_\_ (ФИО, ученая степень, ученое звание)

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета. Протокол № 0500-03 от 28.03.2024

*(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,*

\_\_\_\_\_  
*отметки о продлении вносятся вручную)*

8. Учебный год: 2026/2027

Семестры: 5

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели изучения дисциплины:

- изучение разделов функционального анализа, ориентированных на изучение начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными с целью применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, и использования их в профессиональной деятельности

- введение пространств основных и обобщенных функций и непрерывных операций в этих пространствах введение пространств основных и обобщенных функций и непрерывных операций в этих пространствах с целью анализа постановок задач для УЧП и применения методики функционального анализа к выбору методов решения задач.

Задачи учебной дисциплины:

- оказание помощи в освоении трудных разделов курса уравнений с частными производными, читаемого параллельно данному курсу. Указанные разделы курса уравнений с частными производными отнесены к самостоятельному изучению.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина Дополнительные главы уравнений с частными производными относится к блоку ФТД. Факультативы

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теоретическая механика.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Дисциплина является предшествующей для курсов Численные методы, Теория чисел, Методы оптимизаций и всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; классификацию уравнений в частных производных; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: формулировать основные определения и теоремы о

наук, и использовать их в профессиональн ой деятельности			пространства обобщенных функций  Владеть: теоретическими подходами решению задач на доказательство непрерывности операций в пространствах обобщенных функций; уметь вычислять обобщенные производные
	ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Способен изучать и творчески использовать современную зарубежную и отечественную литературу в области пространств обобщенных функций, счетно нормируемых пространств  Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты в виде математической статьи, рукописи, реферата  Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
	ОПК-1.3.	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы исследования пространств обобщенных функций и непрерывных операций в них Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты  Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 1 / 36.

Форма промежуточной аттестации :зачет 5 семестр

### 13. Виды учебной работы

Виды учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			№ семестра 6
Контактная работа		-	-
В том числе:	лекции	30	30
	практические	-	-
	лабораторные	-	-
Самостоятельная работа		6	6
Промежуточная аттестация		-	-
Итого:		36	36

### 13.1. Содержание дисциплины

Контактная работа со студентами:

1. Лекции			
№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
01	Пространство основных функций $D$ . Пространство обобщенных функций $D'$ . Непрерывные операции в $D$ и $D'$	Пространство основных функций $D$ . Непрерывность операции в $D$ .	<a href="http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-nWqT1YhROX.pdf">http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-nWqT1YhROX.pdf</a>
		Пространство обобщенных функций $D'$ . Пример функционала из $D'$ .	<a href="http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-PIoizNcSCW.pdf">http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-PIoizNcSCW.pdf</a>
		Лемма о диагональной последовательности и теорема о полноте пространства $D'$ .	
		Носитель и нулевое множество обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Дельта-функция Дирака как предел последовательности основных функций.	
		Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности дельта-функции Дирака.	
		Формулы Сохоцкого.	
		Непрерывные операции в $D'$ . Операция дифференцирования. Линейная замена переменной. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию.	
		Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.	
	Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.		
02	Пространство основных функций $S$ . Пространство обобщенных функций медленного роста $S'$	Пространство основных функций $S$ . Сходимость в $S$ . Вложение $D$ в $S$ .	
		Непрерывность операции в $S$ .	
		Пространство обобщенных функций медленного роста в $S'$ . Сходимость в $S'$ . Вложение $S'$ в $D'$ .	
		Непрерывные операции в $S'$ .	
		Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Пространство основных функций $D$ . Пространство обобщенных функций $D'$ . Непрерывные операции в $D$ и $D'$ .	19			4	23
02	Пространство основных функций $S$ . Пространство обобщенных функций медленного роста $S'$	11			2	13
Итого:		30			4	36

Указанные разделы курса уравнений с частными производными отнесены к самостоятельному изучению.

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как контактная работа со студентами, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

В ходе подготовки к контактным занятиям необходимо прочитать конспекты лекций и ознакомиться с дополнительной литературой по курсу Уравнения с частными производными. Начинать надо всегда с рекомендованной литературы. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, уяснения практического положения рассматриваемых теоретических вопросов. Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования. Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы. Результаты конспектирования могут быть представлены в различных формах (конспект, план-конспект, текстуальный конспект, свободный конспект, тематический конспект и др.). В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которой закрепляются знания, а также приобретает практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

При необходимости следует обращаться за консультацией к преподавателю.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: <a href="http://biblioclub.ru">http://biblioclub.ru</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
2	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
3	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
4	Глушко В.П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В.П. Глушко, А.В. Глушко. – СПб : Лань, 2010. – 320 с. илл. (+CD).

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	<a href="http://eqworld.ipmnet.ru">http://eqworld.ipmnet.ru</a> – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	<a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	<a href="http://www.kuchp.ru">http://www.kuchp.ru</a> – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	Электронный курс <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с. . / <a href="http://www.kuchp.ru">www.kuchp.ru</a>
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с. . / <a href="http://www.kuchp.ru">www.kuchp.ru</a>
5	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными

	гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с. / <a href="http://www.kuchp.ru">www.kuchp.ru</a>
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с. . / <a href="http://www.kuchp.ru">www.kuchp.ru</a>
7	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете <a href="http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=470">http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=470</a>

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer..

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория со специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.)

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Пространство основных функций $D$ . Пространство обобщенных функций $D'$ . Непрерывные операции в $D$ и $D'$ .	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, тестовые задания
2	Пространство основных функций $S$ . Пространство обобщенных функций медленного роста $S'$			Домашние задания, тестовые задания
Текущая аттестация				Самостоятельная работа

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

**Текущий контроль успеваемости:** предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Описание технологии проведения

Самостоятельная работа проводится письменно.

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Вариант самостоятельной работы:

1. Вычислить при помощи определения обобщенную производную от  $e^{|x|}$ .
2. Используя формулу, связывающую обычную и обобщенную производные, вычислить обобщенную производную от  $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$ .
3. Используя формулу Лейбница вычислить обобщенную производную от функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & x < -1; \\ 1, & -1 \leq x \leq 1; \\ \cos x, & x > 1. \end{cases}$$

### Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он правильно решил не менее половины заданий;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если его знания не удовлетворяют вышеприведенным требованиям на положительную оценку.

### Примерный перечень тестовых заданий

1. Принадлежит ли функция  $e^{|x|}$  пространству  $D'(\mathbb{R})$ ?  
а) да, б) нет.
2. Принадлежит ли функция  $e^{|x|}$  пространству  $S'(\mathbb{R})$ ?  
а) да, б) нет.
3. Пространством  $D(\mathbb{R}^n)$  называется множество  
а) бесконечно дифференцируемых функций,  
б) финитных функций,  
в) бесконечно дифференцируемых и финитных функций.

4. Пространством  $S'(\mathbb{R}^n)$  называется множество

- а) непрерывных функционалов, заданных над пространством  $S(\mathbb{R}^n)$ ,
- б) непрерывных и линейных функционалов, заданных над пространством  $S(\mathbb{R}^n)$ ,
- в) линейных функционалов, заданных над пространством  $S(\mathbb{R}^n)$ .

5. Принадлежит ли функция  $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$  пространству  $D'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

6. Принадлежит ли функция  $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$  пространству  $S'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

7. Пространством  $S(\mathbb{R}^n)$  называется множество

- а) бесконечно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций,
- б) бесконечно дифференцируемых и финитных в  $\mathbb{R}^n$  функций,
- в) бесконечно дифференцируемых функций которые вместе со всеми своими производными на бесконечности убывают быстрее чем  $|x|^{-m}$ , где  $m$  – произвольное натуральное число.

8. Пространством  $D'(\mathbb{R}^n)$  называется

- а) множество линейных и непрерывных функционалов заданных над пространством  $D(\mathbb{R}^n)$ ,
- б) множество функционалов заданных над пространством  $D(\mathbb{R}^n)$ ,
- в) множество линейных функционалов заданных над пространством  $D(\mathbb{R}^n)$ ,
- г) множество непрерывных функционалов заданных над пространством  $D(\mathbb{R}^n)$ .

9. Принадлежит ли функция

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & x < -1; \\ 1, & -1 \leq x \leq 1; \\ \cos x, & x > 1. \end{cases}$$

пространству  $D'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

10. Принадлежит ли функция

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & x < -1; \\ 1, & -1 \leq x \leq 1; \\ \cos x, & x > 1. \end{cases}$$

пространству  $S'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

11. Дельта-функция Дирака действует на произвольную обобщенную функцию  $\varphi(x)$  по формуле

- а)  $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$ , б)  $(\delta(x), \varphi(x)) = -\varphi(0)$ , в)  $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi'(0)$ .

12. Операция дифференцирования является непрерывной операцией над пространством основных функций?

- а) да, б) нет.

13. Принадлежит ли функция  $|x|\sin x$  пространству  $D'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

14. Принадлежит ли функция  $|x|\sin x$  пространству  $S'(\mathbb{R})$  ?

- а) да, б) нет.

15. Носителем дельта-функции Дирака является

а)  $\mathbb{R}$ , б) 0, в)  $[-1;1]$ .

16. Операция линейной неособой замены является непрерывной операцией над пространством основных функций?

а) да, б) нет.

17. Пусть  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, а  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Какая из этих функций является регулярной?

а)  $\delta(x)$ , б)  $\theta(x)$ .

18. Операция линейной неособой замены является непрерывной операцией над пространством обобщенных функций?

а) да, б) нет.

19. Растекается ли носитель обобщенной функции при дифференцировании?

а) да, б) нет.

20. У любой ли обобщенной функции существует производная по Соболеву?

а) у любой, б) не у любой.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Дополнительные главы уравнений с частными производными» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Дополнительные главы уравнений с частными производными» и степень сформированности компетенции.

#### **Перечень вопросов к зачету:**

1. Пространство основных функций  $D$ . Непрерывность операции в  $D$ .
2. Пространство обобщенных функций  $D'$ . Пример функционала из  $D'$ .
3. Лемма о диагональной последовательности и теорема о полноте пространства  $D'$ .
4. Носитель и нулевое множество обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Дельта-функция Дирака как предел последовательности основных функций.

5. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности дельта-функции Дирака.
6. Формулы Сохоцкого.
7. Непрерывные операции в  $D'$ . Операция дифференцирования. Линейная замена переменной. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию.
8. Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.
9. Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.
10. Пространство основных функций  $S$ . Сходимость в  $S$ . Вложение  $D$  в  $S$ .
11. Непрерывность операции в  $S$ .
12. Пространство обобщенных функций медленного роста в  $S'$ . Сходимость в  $S'$ . Вложение  $S'$  в  $D'$ .
13. Непрерывные операции в  $S'$ .
14. Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
<p><b>«Зачтено»</b> выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров; показал глубокие систематизированные знания, владеет приемами рассуждения и сопоставляет материал из разных источников: теорию связывает с практикой, другими темами данного курса, других изучаемых предметов; без ошибок выполнил практическое задание.</p> <p>Обязательным условием выставленной оценки является правильное решение предложенных примеров (60%)</p> <p>Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной и контрольной работы, систематическая активная работа на лекционных и практических занятиях.</p>	<b>«зачтено»</b>
<p><b>«Не зачтено»</b> Выставляется студенту, который не справился с 50% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.</p>	<b>«Не зачтено»</b>